Fano manifolds with nef tangent bundle

AUTHOR(S):

渡邉, 究

CITATION:

渡邉, 究. Fano manifolds with nef tangent bundle. 代数幾何学シンポジウム記録 2017, 2017: 139-151

ISSUE DATE:

2017

FANO MANIFOLDS WITH NEF TANGENT BUNDLE

埼玉大学・理工学研究科　渡邉　究

1. はじめに

本稿において，多様体とは複素数体上定義された非特異代数多様体を意味する．多様体 X が群多様体の推移的な代数的作用をもつとき，X を等質多様体と呼ぶ．以下，等質多様体とは射影的な等質多様体を意味する．A. Borel と R. Remmert の結果（定理 3.1）により，全ての等質多様体はアーベル多様体と有理等質多様体の積として記述されることが知られている．この報告集の目的は「ネフ接束をもつファノ多様体は有理等質多様体である」という，F. Campana と T. Peternell による予想（CP 予想）の概説を行うことである．

本稿は以下のように構成されている．まず第 2 章では単線織多様体上の有理曲線の変形理論の復習をしたのち，それを用いて有理曲線の接ベクトルの理論（VMRT 理論）について説明する．本稿では直接用いることはないが，CP 予想の研究において VMRT の理論は基本的な道具である．さらに，ファノ多様体の擬指数に関する結果にふれる．第 3 章において，CP 予想に関連して知られていることについて概説する．第 4 章において， CP 多様体の性質や具体的な研究手法について説明する．基本的には [11] の記号や用語を用いる．特に，多様体 X 上の局所自由層 $\mathcal{E}$ に対し，$\mathbb{P}(\mathcal{E})$ はグロタンディックの意味での射影化 $\mathrm{Proj}(\mathrm{Sym}(\mathcal{E}))$ とする．一方，[11] の用語と異なるが，多様体間の非特異射 $f : X \to Y$ の全てのファイバーが $\mathbb{P}^1$ と同型なとき f を $\mathbb{P}^1$ 束という．

2. VMRT について

この章では有理曲線の変形理論と VMRT について知られていることをまとめる．有理曲線の変形理論に関しては [19] を，VMRT の一般論に関しては，[12, 18, 25, 26, 30] を参照されたい．また，ファノ多様体の擬指数に関しても触れる．

2.1. 有理曲線の変形理論と VMRT の定義． 有理曲線の族により覆われる多様体を**単線織多様体**と呼ぶ．また，反標準因子 $-K_X$ が豊富な多様体を**ファノ多様体**と呼ぶ．よく知られている通り，ファノ多様体は単線織多様体である．この章では断りがない限り，X を単線織（非特異）射影多様体とする．$\mathbb{P}^1$ から X への射をパラメータ付けする Hom スキームを $\mathrm{Hom}(\mathbb{P}^1, X)$ とかく．また，非定値射 $f : \mathbb{P}^1 \to X$ に対し，対応する Hom スキームの点を $[f] \in \mathrm{Hom}(\mathbb{P}^1, X)$ とかく．有理曲線 $C \subset X$ に対しその正規化をとることにより非定値射 $f_C : \mathbb{P}^1 \to C \subset X$ が定まる．グロタンディックの定理（例えば [37, Chap. 1, Theorem 2.1.1] 参照）により $\mathbb{P}^1$ 上の任意のベクトル束は直線束の直和としてかけるので，X の

代数幾何学城崎シンポジウムにおける講演の機会を下さった世話人の方々に感謝いたします．本研究は科学研究費「若手研究 B（研究課題番号 ♯17K14153）」のサポートを受けています．

接束 T_X の f_C による引き戻し $f_C^* T_X$ に対しある整数 $a_1 \geq a_2 \ldots \geq a_m$ が存在して，

$$f_C^* T_X = \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(a_1) \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(a_2) \oplus \ldots \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(a_m)$$

とかける．

定義 2.1. 上記記号のもと，全ての i に対し $a_i \geq 0$ が成り立つとき，C を**自由有理曲線（free rational curve）**という．また，$a_1 = 2 > a_2$ を満たす自由有理曲線 C を**標準的有理曲線（standard rational curve）**という（[19, Definition IV2.8] では「極小有理射」と呼んでいることに注意する）．

像と双有理同値な射 $f : \mathbb{P}^1 \to X$ をパラメータ付けする $\mathrm{Hom}(\mathbb{P}^1, X)$ の開部分スキームを $\mathrm{Hom}_{\mathrm{bir}}(\mathbb{P}^1, X) \subset \mathrm{Hom}(\mathbb{P}^1, X)$ とかく．さらに，$\mathrm{Hom}_{\mathrm{bir}}(\mathbb{P}^1, X)$ の正規化を $\mathrm{Hom}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{bir}}(\mathbb{P}^1, X)$ とかく（肩付きの $^{\mathrm{n}}$ は正規化 (normalization) を意味し，次元を表しているわけではない）．自己同型群 $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ は自然に $\mathbb{P}^1 \times \mathrm{Hom}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{bir}}(\mathbb{P}^1, X)$ と $\mathrm{Hom}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{bir}}(\mathbb{P}^1, X)$ へ作用し，それらの幾何学的商をそれぞれ

$$\mathrm{Univ}(X), \ \mathrm{RatCurves}^{\mathrm{n}}(X)$$

と記す（[19, Comment II.2.7, Definition-Proposition II.2.11] 参照）．有理曲線 $C \subset X$ に対し，対応する点を $[C] \in \mathrm{RatCurves}^{\mathrm{n}}(X)$ とかく．

定理 2.2 ([19, Corollary II.2.12, Theorem II.2.15])**.** 上記記号のもと，以下の可換図式が成り立つ

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{P}^1 \times \mathrm{Hom}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{bir}}(\mathbb{P}^1, X) \arrow[r, "U"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{Univ}(X) \arrow[d, "p"] \\
\mathrm{Hom}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{bir}}(\mathbb{P}^1, X) \arrow[r, "u"] & \mathrm{RatCurves}^{\mathrm{n}}(X).
\end{tikzcd}$$

さらに，U と u はそれぞれ主 $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ 束であり，p は $\mathbb{P}^1$ 束である．

注意 2.3. 一般に，$\mathrm{RatCurves}^{\mathrm{n}}(X)$ から X のチャウスキームへの自然な有限射 $\mathrm{RatCurves}^{\mathrm{n}}(X) \to \mathrm{Chow}(X)$ が存在する．この射はほとんどの点で単射（generically injective）であるが，一般には必ずしも単射ではない．

評価写像 $\mathbb{P}^1 \times \mathrm{Hom}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{bir}}(\mathbb{P}^1, X) \to X$ に対応し，$\mathrm{Univ}(X)$ の評価写像

$$\mathrm{Univ}(X) \to X$$

が定まる．以下，$\mathrm{RatCurves}^{\mathrm{n}}(X)$ の既約成分 $\mathcal{M}$ を固定し，$p : \mathcal{U} \to \mathcal{M}$ により $\mathrm{Univ}(X) \to \mathrm{RatCurves}^{\mathrm{n}}(X)$ の引き戻しを，$\iota : \mathcal{U} \to X$ により評価写像を表す．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{U} \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "p"'] & X \\
\mathcal{M} &
\end{tikzcd}$$

定義 2.4. 上記記号のもと，$\iota : \mathcal{U} \to X$ が支配的となるとき，既約成分 $\mathcal{M}$ を**支配的**という．支配的な既約成分のうち反標準次数が最小のものを**極小有理成分（minimal rational component）**という．さらに，極小有理成分 $\mathcal{M}$ がスキームとして $\mathbb{C}$ 上固有的ならば，$\mathcal{M}$ を**非分裂（unsplit）**という．また，極小有理成

分 $\mathcal{M}$ と任意の $x \in X$ に対し $p(\iota^{-1}(x))$ の正規化を $\mathcal{M}_x$ と記し，$p_x : \mathcal{U}_x \to \mathcal{M}_x$ と $\iota_x : \mathcal{U}_x \to X$ により対応する普遍族を表す．[19, Corollary II.2.12] により p_x は $\mathbb{P}^1$ 束である．

注意 2.5. 極小有理成分 $\mathcal{M}$ に対し，$\mathcal{M}$ が $\mathbb{C}$ 上固有的であることと $\mathbb{C}$ 上射影的であることは同値である．実際，$\mathcal{M}$ が $\mathbb{C}$ 上固有的ならば，有限射 π : $\mathrm{RatCurves}^{\mathrm{n}}(X) \to \mathrm{Chow}(X)$ による像 $\pi(\mathcal{M})$ も $\mathbb{C}$ 上固有的である．一般に，$\mathrm{Chow}(X)$ が $\mathbb{C}$ 上射影的なので $\pi(\mathcal{M})$ も射影的となり，$\pi : \mathcal{M} \to \pi(\mathcal{M})$ が有限であることから $\mathcal{M}$ の射影性も従う．

例 2.6. $X \subset \mathbb{P}^3$ を非特異 3 次曲面とする．X に含まれる直線は 27 本のみであり，X は直線では覆われない．この場合，X の極小有理成分 $\mathcal{M}$ はコニックの族である．また，2 本の直線の和集合が極限として現れるコニックの列が存在するので，$\mathcal{M}$ は一般にスキームとして $\mathbb{C}$ 上固有的ではない．

定理 2.7. $\mathcal{M}$ を X の極小有理成分とする．一般の点 $x \in X$ と $[C] \in \mathcal{M}_x$ に対し，以下が成立する．

(i) C は自由である．
(ii) $\mathcal{M}_x$ は非特異かつ $\mathbb{C}$ 上射影的であり，$\dim \mathcal{M}_x = -K_X.C - 2$ を満たす．
(iii) $[C] \in \mathcal{M}_x$ が $\mathcal{M}_x$ の既約成分の一般元であれば，C は標準的である．
(iv) $f_C(o) = x$ ($o \in \mathbb{P}^1$) とすると，f は o においてはめ込みである．すなわち，f_C の o における微分 $(df_C)_o$ は零写像でない．
(v) $\mathcal{M}_x$ は $\iota^{-1}(x)$ と同型である．

証明. (i) は [19, Theorem II.3.11] と同様の議論により従う．(ii) の射影性以外の主張は [19, Theorem II.1.7, Theorem II.2.16] から従う．$\mathcal{M}_x$ が射影的であることは [19, Proposition II.2.2] と極小有理成分の次数の最小性から従う．(iii) は [19, Corollary II.2.9] より従う．(iv) と (v) は [17, Theorem 3.3] より従う．■

定義 2.8. X の極小有理成分 $\mathcal{M}$ と一般の点 $x \in X$ に対し，定理 2.7 (iv) により，次の射が定まる：

$$\tau_x : \mathcal{M}_x \to \mathbb{P}(\Omega_{X,x}); [C] \mapsto [\mathrm{Im}((df_C)_o)]$$

この射を x **における接写像（tangent map at** x**）**，

$$\mathcal{C}_x := \mathrm{Im}(\tau_x) \subset \mathbb{P}(\Omega_{X,x})$$

を X **の点** x **における VMRT (Variety of Minimal Rational Tangents at** x**)** という．さらに，一般の点 $x \in X$ に対し τ_x が定まることと定理 2.7 (v) により，有理写像

$$\tau : \mathcal{U} \cdots \to \mathbb{P}(\Omega_X)$$

が定まる．この有理写像を**グローバル接写像（global tangent map）**という．

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{P}(\Omega_X) \arrow[d, "\text{projection}"] \\
\mathcal{U} \arrow[ur, dotted, "\tau"] \arrow[r, "\iota"] & X
\end{tikzcd}$$

定理 2.9 ([17, Theorem 3.4], [14, Theorem 1, Corollary 1]). 定義 2.8 の仮定のもと，以下が成立する．

(i) $\tau_x : \mathcal{M}_x \to \mathcal{C}_x$ は有限射である．

(ii) $\tau_x : \mathcal{M}_x \to \mathcal{C}_x$ は双有理射である．

従って，$\tau_x : \mathcal{M}_x \to \mathcal{C}_x$ は正規化である．

命題 2.10 ([1, Proposition 2.7]). 定義 2.8 の仮定のもと，$\tau_x : \mathcal{M}_x \to \mathcal{C}_x$ が $[C] \in \mathcal{M}_x$ においてはめ込みであることと，C が標準的であることは同値である．

例 2.11. 多様体 $X \subset \mathbb{P}^N$ が直線で覆われている場合を考える．このとき，X の極小有理成分 $\mathcal{M}$ は直線の族である．定理 2.7 (i) により，一般の $x \in X$ と任意の $[\ell] \in \mathcal{M}_x$ に対し，ℓ は自由有理曲線である．また，2 つの単射

$$T_{\mathbb{P}^1} \hookrightarrow T_X|_\ell,\ T_X|_\ell \hookrightarrow T_{\mathbb{P}^N}|_\ell$$

により，ℓ は標準的有理曲線であることが分かる．よって，命題 2.10 により，τ_x ははめ込みである．また，固定点 x を通る直線は x における接方向により一意的に定まるので，τ_x は単射である．以上により，$\tau_x : \mathcal{M}_x \hookrightarrow \mathbb{P}(\Omega_{X,x})$ は閉埋め込みであり，従って $\mathcal{M}_x \cong \mathcal{C}_x$ となる．

注意 2.12. X 上の極小有理成分 $\mathcal{M}$ と一般の点 $x \in X$ に対し，$p_x : \mathcal{U}_x \to \mathcal{M}_x$ と $\iota_x : \mathcal{U}_x \to X$ を普遍族に付随する射，$T_{\mathcal{U}_x/\mathcal{M}_x}$ と $K_{\mathcal{U}_x/\mathcal{M}_x}$ をそれぞれ $\mathcal{U}_x \to \mathcal{M}_x$ の相対接束と相対標準因子とする．自然な射 $T_{\mathcal{U}_x/\mathcal{M}_x}|_{q^{-1}(x)} \subset T_{\mathcal{U}_x}|_{q^{-1}(x)}$ と $T_{\mathcal{U}_x}|_{q^{-1}(x)} \to T_{X,x} \otimes \mathcal{O}_{q^{-1}(x)}$ の合成を考えると，[17, Theorem 3.3, Theorem 3.4] により $T_{\mathcal{U}_x/\mathcal{M}_x}|_{q^{-1}(x)}$ は $T_{X,x} \otimes \mathcal{O}_{q^{-1}(x)}$ の部分束である．この束により定まる射 $q^{-1}(x) \to \mathbb{P}(\Omega_{X,x})$ が接写像 τ_x である．よって，接写像 τ_x は次を満たす：

$$\tau_x^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\Omega_{X,x})}(1) = \mathcal{O}_{q^{-1}(x)}(K_{\mathcal{U}_x/\mathcal{M}_x}). \tag{1}$$

注意 2.13. X をピカール数 1 の有理等質多様体とする．このとき，あるディンキン図形 $\mathcal{D}$ を用いて $\mathcal{D}(k)$ とかける．よく知られているように，X のピカール群の豊富な生成元 L は非常に豊富なので，完備線形系 $|L|$ により X を射影空間に埋め込むことができる（例えば，[39, Theorem 6.5] 参照）．さらに，この埋め込みに関して X は直線により覆われる（例えば，[19, Theorem V.1.15] 参照）．従って，例 2.11 により，接写像 τ_x は埋め込みになり，$\mathcal{M}_x \cong \mathcal{C}_x$ が成り立つ．また，注意 2.12 により，$\mathcal{C}_x$ の埋め込みの情報が得られる．一般に，ピカール数 1 の有理等質多様体の VMRT の構造は完全に決定されている（例えば，[12, 20, 25] などを参照）．

2.2. **ファノ多様体の指数と擬指数.** まず，一般のファノ多様体に対する 2 つの不変量の定義を思い出す：

定義 2.14. ファノ多様体 X に対し，

$$i(X) := \min\{-K_X.C \mid C \text{ は } X \text{ 上の有理曲線}\}$$

を X の擬指数 (pseudo-index)，

$$r(X) := \max\{r \mid (-K_X)/r \in \mathrm{Pic}(X)\}$$

を X の指数 (index) という．

注意 2.15. 定義により，ファノ多様体 X に対し $r(X)$ は $i(X)$ の約数である．ピカール数が 1 より大きいとき，一般にそれらの値は一致しない．実際，$X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ に対し，$r(X) = 1 < i(X) = 2$ となる．一方で，「ピカール数が 1 のとき，$i(X) = r(X)$ が成り立つか？」という問題は未だ未解決である（例えば [19, Problem V.1.13] 参照）．

指数と擬指数に関する 2 つの予想を述べる．

予想 2.16 (向井予想, [28, Conjecture 4])**.** ファノ多様体 X に対し，

$$(r(X) - 1)\rho(X) \leq \dim X$$

が成り立つ．さらに，等号が成り立つのは $X \cong (\mathbb{P}^{r(X)-1})^{\rho(X)}$ のときに限る．

予想 2.17 (一般化された向井予想, [2, Conjecture])**.** ファノ多様体 X に対し，

$$(i(X) - 1)\rho(X) \leq \dim X$$

が成り立つ．さらに，等号が成り立つのは $X \cong (\mathbb{P}^{i(X)-1})^{\rho(X)}$ のときに限る．

注意 2.18. これらの予想は指数や擬指数が大きい場合や，有理等質多様体やトーリック多様体などの特殊な多様体について成り立つことが知られている．例えば，日本語で書かれた解説記事では [44] を，論文では [31] や [41] を参照のこと．

上記予想の特別な場合として以下の結果が知られている：

定理 2.19. m 次元ファノ多様体 X に対し，以下が成立する．

[6] $i(X) \geq m + 1$ ならば，X は射影空間 $\mathbb{P}^m$ と同型である．

[23, 8] $i(X) = m$ ならば，X は 2 次超曲面 Q^m と同型である．

3. CP 予想

A. Borel と R. Remmert により，以下の等質多様体の構造定理が知られている：

定理 3.1 ([3])**.** 任意の等質多様体はアーベル多様体と有理等質多様体の積と同型である．さらに，任意の有理等質多様体は半単純線形代数群 G の閉部分群 P による幾何学的商 G/P と同型である．

射影多様体 X に対し，その自己同型群 $\mathrm{Aut}(X)$ は $H^0(X, T_X)$ をリー代数としてもつ代数群である．まず，接束による等質多様体の特徴付けを思い出そう．

命題 3.2. 射影多様体 X に対し，X が等質多様体であることと接束 T_X が大域切断により生成されることは同値である．特に，等質多様体の接束はネフである．

証明. G を $\mathrm{Aut}(X)$ の単位元を含む既約成分とする．任意の点 $x \in X$ に対し，軌道写像を考える：

$$\mu_x : G \to X;\ \ g \mapsto gx.$$

単位元 $e \in G$ における μ_x の微分 $d\mu_x : T_eG \to T_xX$ は X の代数的ベクトル場の x における評価写像に他ならない：

$$\mathrm{ev_x} : H^0(X, T_X) \to T_xX; v \to v_x.$$

よって，主張が従う． ■

さらに，アーベル多様体と有理等質多様体は接束の観点から区別することができる．

命題 3.3. 射影多様体 X に対し，以下が成立する．

(i) X がアーベル多様体であることと接束 T_X が自明であることは同値である．
(ii) X が有理等質多様体ならば，その反標準因子に付随する層 $\mathcal{O}(-K_X)$ は豊富かつ大域切断により生成される．特に，X はファノ多様体である．

証明. (i) アーベル多様体の接束が自明であることはよく知られている．例えば，[29, p.42 (iii)] を参照のこと．逆は，例えば [7, Corollary 3.19] から従う．

(ii) 代数群の知識を使わない簡単な証明として，森重文による証明が知られている． 例えば，[19, V. Theorem 1.4] を参照のこと． ■

系 3.4. 有理等質多様体 G/P はネフ接束をもつファノ多様体である．

この逆が成り立つことを主張するのが F. Campana と T. Peternell による次の予想（以下，**CP 予想**と呼ぶ）である：

予想 3.5 ([4, 11.2]). ネフ接束をもつファノ多様体 X（以下，**CP 多様体**と呼ぶ）は有理等質多様体である．従って，半単純線形代数群 G とその放物的部分群 P が存在し，$X = G/P$ が成り立つ．

定理 3.1 や命題 3.2 を用いると，この予想は次のように言い換えることができる．

予想 3.6. ファノ多様体 X に対し，接束 T_X が大域切断で生成されることと T_X がネフであることは同値である．

注意 3.7. E を楕円曲線 C 上の階数 2 の半安定ベクトル束とする．このとき，$\mathbb{P}(E)$ の接束はネフであるが $\mathbb{P}(E)$ は等質多様体ではない（[4, Theorem 3.1]）．また，一般にファノ多様体上のベクトル束 E に対して，E が大域切断で生成されることとネフであることは同値でない．従って，CP 予想が正しいことを示すためにはファノ多様体と接束の特殊性を用いる必要がある．

以下に，CP 予想が正しいことが示されている場合をまとめる：

定理 3.8. ネフ接束をもつファノ多様体 X が以下のいずれかの条件を満たすならば，X は有理等質多様体である；

(i) $\dim X \leq 5$.
(ii) $\rho(X) = 1$ を満たし，さらに $i(X) \geq \dim X$ または $i(X) < 4$ を満たす．
(iii) $\rho(X) > \dim X - 5$.
(iv) $X \subset \mathbb{P}^N$ は超曲面の完全交叉多様体．
(v) X はトーリック多様体またはトロイダル多様体 (toroidal variety).
(vi) X はホロスフェリカル多様体 (horospherical variety).
(vii) T_X が巨大かつ 1 アンプル．

ここでは上記定理やそれに関連する論文を列挙する．まず，定理 3.8 の (i) – (iii) が成り立つことは，定理 2.19 と以下の論文の結果から分かる．以下の論文

において，ネフ接束をもつファノ多様体 X がそれぞれの条件を満たすならば，X は有理等質多様体であることが示されている：

[4] $\dim X \leq 3$.
[5] $\dim X = 4, \rho(X) > 1$.
[24] $(i(X), \rho(X), b_4(X)) = (3, 1, 1)$.
[13] $(i(X), \rho(X)) = (3, 1)$（[24] における証明は $b_4(X) = 1$ を除いても成り立つことを指摘.）
[42] $\dim X = 5, \rho(X) > 1$.
[15] $(\dim X, i(X), \rho(X)) = (5, 4, 1)$.
[43] $\rho(X) > \dim X - 4$ または $\dim X \leq \rho(X)(i(X) - 1) + 1$.
[16] $\rho(X) > \dim X - 5$.

特に，$i(X) \leq 3$ のときと $(\dim X, i(X), \rho(X)) = (5, 4, 1)$ の場合については，第 4.2 章において詳しく説明する．定理 3.8 の (iv) 以降についてはそれぞれ以下の論文において扱われている．

[38] 超曲面の完全交叉多様体 $X \subset \mathbb{P}^N$ が有理連結かつ凸 (convex) ならば，X は射影空間か 2 次超曲面と同型であることを示した．ネフ接束をもつファノ多様体は有理連結かつ凸なので，定理 3.8 (iv) が従う．
[10] [38] と同様の結果が正標数でも成り立つことが示されている．
[9] [Proposition 5.3] 因子のネフ錘 (nef cone) と擬有効錘 (pseudo-effective cone) が一致するトーリック多様体は射影空間の積であることを示している．ネフ接束をもつトーリックファノ多様体はこの条件を満たすので，定理 3.8 (v) が従う．
[22] [Theorem 1.2] トロイダルもしくはトーリック多様体 X に対し，（固定された余次元の）サイクルのネフ錘 (nef cone) と擬有効錘 (pseudo-effective cone) が一致するのは X が有理等質多様体のときに限ることを示している．このことから，定理 3.8 (v) が従う．
[21] 定理 3.8 (vi) を示している．
[40] 定理 3.8 (vii) を示している．
[32] [40] の一般化を扱っている．

4. CP 多様体

4.1. **ピカール数が 1 より大きい CP 多様体．** この章では，断りがない限り常に X は CP 多様体であるとする．また，$m := \dim X$, $n := \rho(X)$ とする．CP 多様体 X はファノ多様体なので，有理曲線により覆われる．さらに，定義により T_X がネフなので，任意の有理曲線は自由である．このことから，様々な性質が導かれる．まず，CP 多様体の収縮射に関して次の結果が知られている．

定理 4.1. X を CP 多様体，$\pi : X \to Y$ を X の任意の収縮射とする．また，任意の $y \in Y$ に対し，$j : \pi^{-1}(y) \hookrightarrow X$ を自然な包含射とする．このとき以下が成立する：

(i) クライマン-森錘 $\overline{\mathrm{NE}}(X) = \mathrm{NE(X)}$ は単体的 (simplicial) である．
(ii) $\pi : X \to Y$ は非特異射であり，Y と任意の π のファイバー $\pi^{-1}(y)$ も CP 多様体である．
(iii) ピカール数に関する等式 $\rho(\pi^{-1}(y)) = \rho(X) - \rho(Y)$ が成り立つ．

(iv) $j_*(\mathrm{NE}(\pi^{-1}(y))) = \mathrm{NE}(X) \cap j_*(N_1(\pi^{-1}(y)))$ が成り立つ．

証明. X はファノ多様体なので，$\overline{\mathrm{NE}}(X) = \mathrm{NE}(\mathrm{X})$ となることに注意する．さらに，CP 多様体 X の収縮射 $\pi : X \to Y$ は必ずファイバー型である．実際，π により Y 上の 1 点に潰れる有理曲線 $C \subset X$ が存在するが，接束 T_X のネフ性により C は自由である．よって，C の変形が X を覆うことになり，π がファイバー型であることが導かれる．このことを用いて，[27, Proposition 4 (4)] において (i) が示された．π がファイバー型であることは簡単に分かるが，より強く (ii) の主張が成り立つ．このことは [40, Theorem 4.4] において示された．また，π の非特異性により，(iii) の性質が導かれる．例えば，[27, Proposition 4 (3)] を参照されたい． ■

この定理を用いることで，一般化された向井予想が CP 多様体に対して成立することを示すことができる．

命題 4.2 ([43, Theorem 1.2, Proposition 3.3]). CP 多様体に対して，一般化された向井予想（予想 2.17）が成立する．

[43] や [16] などのようにピカール数が大きい CP 多様体を扱うとき，次の命題が有用である．この命題も定理 4.1 から従う．

命題 4.3 ([27, Lemma 1, Proposition 5]). $\pi : X \to Y$ を CP 多様体の間の収縮射とする．もし，Y の任意の端射線の収縮射が $\mathbb{P}^1$ 束ならば，ある CP 多様体 Z が存在し，$X \cong Y \times Z$ となる．

X のピカール数が 1 より大きいときは，上記定理や命題を用いることにより X の構造を調べることができる．

例 4.4. X をピカール数 2 の 3 次元 CP 多様体 X とし，$\pi : X \to Y$ を端射線の収縮射とする．このとき，定理 4.1 により，Y はピカール数 1 の CP 多様体であり $\dim Y \leq 2$ を満たす．もし $\dim Y = 1$ ならば，$Y = \mathbb{P}^1$ となる．このとき，命題 4.3 によりある多様体 Z が存在し $X \cong Y \times Z$ となるが，Z はピカール数 1 の 2 次元ファノ多様体なので $Z \cong \mathbb{P}^2$ である．よって，$X \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ である．一方，$\dim Y = 2$ ならば $Y \cong \mathbb{P}^2$ となり，定理 4.1 により $\pi : X \to Y = \mathbb{P}^2$ は $\mathbb{P}^1$ 束となることが分かる．X は π と異なる端射線の収縮射 $\pi' : X \to Y'$ をもつことに注意する．π' に対しても上と同様の議論を行うことにより，X は $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ と同型になるか，π, π' ともに $\mathbb{P}^2$ 上の $\mathbb{P}^1$ 束となるかいずれかである．π, π' ともに $\mathbb{P}^1$ 束となるときは，後述の定理 4.6 により，$X \cong \mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2})$ となる．

ピカール数が 1 のときは，上記の一連の結果は X の構造に制約を与えないため，異なる手法が必要である．そこでよく用いられるのが 2 章で説明をした有理曲線の変形理論や VMRT の理論である．

ピカール数 1 の CP 多様体 X に対し，$\mathcal{M}$ をその極小有理成分，$p : \mathcal{U} \to \mathcal{M}, \iota : \mathcal{U} \to X$ を $\mathcal{M}$ に付随する族とする．$\mathcal{M}$ に対して定理 2.7 が成り立つが，X が CP 多様体であればさらに次が成立する．

命題 4.5. 上記記号のもと，以下が成立する：

(i) $\mathcal{M}$ は $(m + i(X) - 3)$ 次元非特異射影多様体である．特に，$\mathcal{M}$ は非分裂である．

(ii) 評価写像 $\iota : \mathcal{U} \to X$ は連結ファイバーをもつ非特異射である．
(iii) 任意の $x \in X$ に対し，$\iota^{-1}(x)$ は $(i(X)-2)$ 次元非特異射影多様体である．特に，$i(X) \geq 2$ である．

証明. 任意の $[f] \in \mathrm{Hom}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{bir}}(\mathbb{P}^1, X)$ に対し，$H^1(\mathbb{P}^1, f^*T_X) = 0$ となる．すなわち，変形の障害が消えるので，[19, Theorem II.1.7] により $\mathrm{Hom}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{bir}}(\mathbb{P}^1, X)$ は非特異であり，その次元は $(m + i(X))$ となる．従って，定理 2.7 により，$\mathcal{M}$ は $(m + i(X) - 3)$ 次元かつ非特異である．$\mathcal{M}$ が非分裂であることは [19, Proposition II.2.14.1] より従うので，注意 2.5 により $\mathcal{M}$ は射影的である．以上により，(i) が成立する．評価写像 ι の非特異性は [19, Corollary II.3.5.3] と定理 2.7 により従う．いま X はファノ多様体なので，特に単連結である．ι のシュタイン分解 $\iota = f \circ g$ を考える．f は有限射であるが，ι の非特異性により f も非特異である．すなわち f はエタール射となるが，X の単連結性により f は同型射である．以上により，(ii) が成立する．(iii) は (i), (ii) から従う． ■

ここで，CP 予想の研究において重要な結果を紹介する．

定理 4.6 ([35], [36, Theorem A.1])**.** 射影多様体 X に対し，以下は同値である．
(i) X はピカール数 $\rho(X)$ と同じ数の $\mathbb{P}^1$ 束構造をもち，それらの張る端射線は $N_1(X)$ において線形独立である．
(ii) ある半単純線形代数群 G が存在し，X は有理等質多様体 G/B と同型である．ただし，B は G のボレル部分群（すなわち極大連結可解閉部分群）とする．

系 4.7. ファノ多様体 X が有理等質多様体であることと以下の条件を満たす射影多様体 Z が存在することは同値である:
(i) Z から X へ収縮射が存在する．
(ii) 射影多様体 Z は $\rho(Z)$ 個の $\mathbb{P}^1$ 束構造をもち，それらの張る端射線は $N_1(Z)$ において線形独立である．

証明. X を有理等質多様体とする．定理 3.1 により，半単純線形代数群 G とその放物的部分群 P が存在し $X = G/P$ となる．このとき，P に含まれるボレル部分群 B を用いて $Z = G/B$ とすればよい．逆に，Z が条件 (i), (ii) を満たすならば，定理 4.6 により $Z = G/B$ となる．条件 (i) より X は有理等質多様体 G/B の収縮射の像であるが，それは有理等質多様体である． ■

4.2. **ピカール数 1 の CP 多様体.** この章では X をピカール数 1 の CP 多様体，$\mathcal{M}$ をその極小有理成分，$p : \mathcal{U} \to \mathcal{M}, \iota : \mathcal{U} \to X$ を $\mathcal{M}$ に付随する族とする．定理 2.19 と命題 4.5 により，$2 \leq i(X) \leq \dim X + 1$ が成り立ち，さらに $i(X) \geq \dim X$ となるのは X が $\mathbb{P}^m$ または Q^m となるときのみである．

定理 4.8. 上記記号のもと，以下が成り立つ．
(i) $i(X) = 2$ ならば X は $\mathbb{P}^1$ と同型である．
(ii) ([24, 13]) $i(X) = 3$ ならば X は有理等質多様体である．

証明. (i) $i(X) = 2$ とすると，命題 4.5 (iii) により ι はエタール射である．X はファノなので単連結となり，従って $\mathcal{U} \cong X$ となる．$\mathcal{U} \to \mathcal{M}$ は $\mathbb{P}^1$ 束だが，仮定より $\rho(X) = 1$ なので，$\mathcal{U} = \mathbb{P}^1$ かつ $\mathcal{M}$ は 1 点となる．以上により，$X \cong \mathbb{P}^1$ となる．

(i) $i(X)=3$ とすると，命題 4.5 (iii) により ι は相対次元 1 の非特異射である．このとき，[24, Lemma 1.2.2] にあるように，ι が $\mathbb{P}^1$ 束であることが簡単に分かる．従って，$\mathcal{U}$ は相異なる 2 つの $\mathbb{P}^1$ 束構造をもつピカール数 2 の射影多様体なので，系 4.7 により X の等質性が従う． ■

このように，定理 4.6 を用いれば，$i(X)=3$ のときは簡単に CP 予想が成り立つことを示すことができる．金光により研究された $(\dim X, i(X), \rho(X)) = (5,4,1)$ の場合も同様のアイデアにより示された：

定理 4.9 ([15])**.** 上記記号のもと，$(\dim X, i(X), \rho(X)) = (5,4,1)$ ならば，X は有理等質多様体である．

証明. 仮定のもと，[15, Theorem 3.3] にあるように，ι が $\mathbb{P}^2$ 束であることが分かる（$i(X)=3$ のときとは異なり，このことを示すことは簡単ではない）．さらに，ι の相対接束 T_ι に対しその射影化 $W := \mathbb{P}(T_\iota)$ を考える．金光はこの W が相異なる 3 つの $\mathbb{P}^1$ 束構造をもつことを示し，系 4.7 を用いることにより X の等質性を示した． ■

定理 4.8，4.9 の証明から，ピカール数 1 の CP 多様体に対する CP 予想の研究は次の 2 つのステップに分けることができる．

(i) 評価写像 ι のファイバーの構造決定．
(ii) (i) を用いて，系 4.7 に現れるような $\mathcal{U}$ を支配する多様体 Z の構成．

(i) に関してはほとんど何も知られておらず，新たなアイデアが求められる．一方，(ii) に関しては G. Occhetta, L. E. Soá Conde, J. A. Wiśniewski による論文 [36] において，Z を構成するアイデアが述べられている．また，その方法を用いて，次の結果が示された：

定理 4.10 ([36])**.** X をピカール数 1 のファノ多様体とする．X は非分裂極小有理成分 $p:\mathcal{U}\to\mathcal{M}$ をもち，その評価写像 $\iota:\mathcal{U}\to X$ が非特異射であると仮定する．さらに，任意の $x\in X$ に対し，$\iota^{-1}(x)$ が（固定された）有理等質多様体 Z と同型ならば，X は有理等質多様体である．

証明. 定理の仮定のもと，$\iota:\mathcal{U}\to X$ の任意のファイバーは有理等質多様体 Z と同型である．G を $\mathrm{Aut}(Z)$ の単位元を含む既約成分とすると，$Z=G/P$ とかける．ここで，G は半単純線形代数群，P はその放物的部分群である．このとき，解析的位相に関して $\iota:\mathcal{U}\to X$ は G/P をファイバーとしてもつファイバー束となる．ファイバー束 ι はコサイクル $\theta\in H^1(X,G)$ を定める．このコサイクルを用いて，X 上の主 G 束 $E_G\to X$ を構成することができる．さらに，任意の放物的部分群 $P'\subset G$ に対し，G/P' 束を考えることができる：

$$q_{P'}: E_{P'} := E_G \times_G G/P' := (E_G\times G/P')/\sim_G \to X.$$

ただし，任意の $h\in G$ に対し，$(x, gP')\sim_G (xh, h^{-1}gP')$ とする．このように定めると，任意の放物的部分群 $P_1\subset P_2\subset G$ に対し，$q_{P_2}\circ q_{P_1,P_2}=q_{P_1}$ を満たす自然な射 $q_{P_1,P_2}: E_{P_1}\to E_{P_2}$ が存在する．特に，P に含まれるボレル部分群

B をとり，$\bar{\iota}:\overline{\mathcal{U}}:=E_B\to X$ とおくと，次の可換図式を満たす：

$$\begin{tikzcd}
\overline{\mathcal{U}} \arrow[d] \arrow[dr, "\bar{\iota}"] & \\
\mathcal{U} \arrow[r, "\iota"'] & X
\end{tikzcd}$$

また，よく知られているように，B を真に含む最小の放物的部分群 P_i が $\rho(G/B)$ 個あり，$G/B\to G/P_i$ はそれぞれ $\mathbb{P}^1$ 束である．従って，$\overline{\mathcal{U}}:=E_B$ は $\rho(G/B)$ 個の $\mathbb{P}^1$ 束 $\overline{\mathcal{U}}\to E_{P_i}$ を持つ．

いま，$\rho(\overline{\mathcal{U}})=\rho(G/B)+1$ なので，系 4.7 を適用するにはさらにもう 1 つ独立な $\mathbb{P}^1$ 束構造が必要である．定理 2.7 により，$\mathcal{U}$ は $\mathbb{P}^1$ 束構造 $p:\mathcal{U}\to\mathcal{M}$ をもつが，この $\mathbb{P}^1$ 束構造が $\overline{\mathcal{U}}$ 上に持ち上がることを示すことができる．その結果，$\overline{\mathcal{U}}$ は $\rho(G/B)+1$ 個の $\mathbb{P}^1$ 束構造を持つことが分かる．それらが定める端射線が $N_1(\overline{\mathcal{U}})$ において独立であることは簡単に確認できるので，系 4.7 により X の等質性が従う． ■

注意 4.11. 3 つの例外を除いて，ピカール数 1 の有理等質多様体の VMRT は等質多様体である．3 つの例外のうち 2 つの場合は，定理 4.10（の弱形）に対応する命題が成立する．詳細は [33, 34] を参照されたい．

参考文献

[1] Carolina Araujo. Rational curves of minimal degree and characterizations of projective spaces. *Math. Ann.*, 335(4):937–951, 2006.

[2] Laurent Bonavero, Cinzia Casagrande, Olivier Debarre, and Stéphane Druel. Sur une conjecture de Mukai. *Comment. Math. Helv.*, 78(3):601–626, 2003.

[3] Armand Borel and Reinhold. Remmert. Über kompakte homogene Kählersche Mannigfaltigkeiten. *Math. Ann.*, 145:429–439, 1961/1962.

[4] Frédéric Campana and Thomas Peternell. Projective manifolds whose tangent bundles are numerically effective. *Math. Ann.*, 289(1):169–187, 1991.

[5] Frédéric Campana and Thomas Peternell. 4-folds with numerically effective tangent bundles and second Betti numbers greater than one. *Manuscripta Math.*, 79(3-4):225–238, 1993.

[6] Koji Cho, Yoichi Miyaoka, and Nicholas I. Shepherd-Barron. Characterizations of projective space and applications to complex symplectic manifolds. In *Higher dimensional birational geometry (Kyoto, 1997)*, volume 35 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 1–88. Math. Soc. Japan, Tokyo, 2002.

[7] Olivier Debarre. *Higher-dimensional algebraic geometry.* Universitext. Springer-Verlag, New York, 2001.

[8] Thomas Dedieu and Andreas Höring. Numerical characterisation of quadrics. *Algebr. Geom.*, 4(1):120–135, 2017.

[9] Osamu Fujino and Hiroshi Sato. Smooth projective toric varieties whose nontrivial nef line bundles are big. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, 85(7):89–94, 2009.

[10] Katsuhisa Furukawa. Convex separably rationally connected complete intersections. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 144(9):3657–3669, 2016.

[11] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry.* Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.

[12] Jun-Muk Hwang. Geometry of minimal rational curves on Fano manifolds. In *School on Vanishing Theorems and Effective Results in Algebraic Geometry (Trieste, 2000)*,

volume 6 of *ICTP Lect. Notes*, pages 335–393. Abdus Salam Int. Cent. Theoret. Phys., Trieste, 2001.

[13] Jun-Muk Hwang. Rigidity of rational homogeneous spaces. In *International Congress of Mathematicians. Vol. II*, pages 613–626. Eur. Math. Soc., Zürich, 2006.

[14] Jun-Muk Hwang and Ngaiming Mok. Birationality of the tangent map for minimal rational curves. *Asian J. Math.*, 8(1):51–63, 2004.

[15] Akihiro Kanemitsu. Fano 5-folds with nef tangent bundles. *Preprint arXiv:*`1503.04579`*, to appear in Math. Res. Lett.*

[16] Akihiro Kanemitsu. Fano n-folds with nef tangent bundle and Picard number greater than $n-5$. *Math. Z.*, 284(1-2):195–208, 2016.

[17] Stefan Kebekus. Families of singular rational curves. *J. Algebraic Geom.*, 11(2):245–256, 2002.

[18] Stefan Kebekus and Luis E. Solá Conde. Existence of rational curves on algebraic varieties, minimal rational tangents, and applications. In *Global aspects of complex geometry*, pages 359–416. Springer, Berlin, 2006.

[19] János Kollár. *Rational curves on algebraic varieties*, volume 32 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*. Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[20] Joseph M. Landsberg and Laurent Manivel. On the projective geometry of rational homogeneous varieties. *Comment. Math. Helv.*, 78(1):65–100, 2003.

[21] Qifeng Li. Smooth projective horospherical varieties with nef tangent bundles. *Preprint arXiv:*`1512.04686`.

[22] Qifeng Li. Pseudo-effective and nef cones on spherical varieties. *Math. Z.*, 280(3-4):945–979, 2015.

[23] Yoichi Miyaoka. Numerical characterisations of hyperquadrics. In *Complex analysis in several variables—Memorial Conference of Kiyoshi Oka's Centennial Birthday*, volume 42 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 209–235. Math. Soc. Japan, Tokyo, 2004.

[24] Ngaiming Mok. On Fano manifolds with nef tangent bundles admitting 1-dimensional varieties of minimal rational tangents. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 354(7):2639–2658 (electronic), 2002.

[25] Ngaiming Mok. Geometric structures on uniruled projective manifolds defined by their varieties of minimal rational tangents. *Astérisque*, (322):151–205, 2008. Géométrie différentielle, physique mathématique, mathématiques et société. II.

[26] Ngaiming Mok. Geometric structures and substructures on uniruled projective manifolds. In *Foliation Theory in Algebraic Geometry*, Simons Symposia, pages 103–148. Springer International Publishing, 2016.

[27] Roberto Muñoz, Gianluca Occhetta, Luis E. Solá Conde, and Kiwamu Watanabe. Rational curves, Dynkin diagrams and Fano manifolds with nef tangent bundle. *Math. Ann.*, 361(3-4):583–609, 2015.

[28] Shigeru Mukai. Problems on chmcterization of the complex projective space. *Birational Geometry of Algebraic Varieties Open Problems, The 23th international symposium, division of mathematics, the Taniguchi foundation, August 22-August 27, Katata*, pages 57–60, 1988.

[29] David Mumford. *Abelian varieties.* Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics, No. 5. Published for the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay; Oxford University Press, London, 1970.

[30] Roberto Muñoz, Gianluca Occhetta, Luis E. Solá Conde, Kiwamu Watanabe, and Jarosław A. Wiśniewski. A survey on the Campana-Peternell conjecture. *Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste*, 47:127–185, 2015.

[31] Carla Novelli. On Fano manifolds with an unsplit dominating family of rational curves. *Kodai Math. J.*, 35(3):425–438, 2012.

[32] Gianluca Occhetta, Luis E. Solá Conde, and Kiwamu Watanabe. Uniform families of minimal rational curves on Fano manifolds. *Rev. Mat. Complut.*, 29(2):423–437, 2016.

[33] Gianluca Occhetta, Luis E. Solá Conde, and Kiwamu Watanabe. A characterization of symplectic Grassmannians. *Math. Z.*, 286(3-4):1421–1433, 2017.

[34] Gianluca Occhetta, Luis E. Solá Conde, and Kiwamu Watanabe. Characterizing the homogeneous variety $F_4(4)$. *Preprint arXiv:*`1706.01640`, 2017.

[35] Gianluca Occhetta, Luis E. Solá Conde, Kiwamu Watanabe, and Jarosław A. Wiśniewski. Fano manifolds whose elementary contractions are smooth $\mathbb{P}^1$-fibrations: a geometric characterization of flag varieties. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)*, 17(2):573–607, 2017.

[36] Gianluca Occhetta, Luis E. Solá Conde, and Jarosław A. Wiśniewski. Flag bundles on Fano manifolds. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 106(4):651–669, 2016.

[37] Christian Okonek, Michael Schneider, and Heinz Spindler. *Vector bundles on complex projective spaces*. Progress in Mathematics, 3. Birkhäuser, Boston, Mass., 1980.

[38] R. Pandharipande. Convex rationally connected varieties. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 141(5):1539–1543, 2013.

[39] Dennis M. Snow. Homogeneous vector bundles. In *Group actions and invariant theory (Montreal, PQ, 1988)*, volume 10 of *CMS Conf. Proc.*, pages 193–205. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989.

[40] Luis E. Solá Conde and Jarosław A. Wiśniewski. On manifolds whose tangent bundle is big and 1-ample. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 89(2):273–290, 2004.

[41] Taku Suzuki. On the picard number of fano 6-folds with a non-small contraction. *Preprint arXiv:*`1703.07700`.

[42] Kiwamu Watanabe. Fano 5-folds with nef tangent bundles and Picard numbers greater than one. *Math. Z.*, 276(1-2):39–49, 2014.

[43] Kiwamu Watanabe. Fano manifolds with nef tangent bundle and large Picard number. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, 91(6):89–94, 2015.

[44] 高木寛通. Fano 多様体の諸問題 (複素幾何学の諸問題), 数理解析研究所講究録, 1731, 106-126, 2011.

Course of Mathematics, Programs in Mathematics, Electronics and Informatics, Graduate School of Science and Engineering, Saitama University. Shimo-Okubo 255, Sakura-ku Saitama-shi, 338-8570, Japan.

E-mail address: `kwatanab@rimath.saitama-u.ac.jp`